

# TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: CONHECIMENTOS E DIFICULDADES DE FUTUROS PROFESSORES

Alexandra Gomes  
CIEC/IE – Universidade do Minho  
magomes@ie.uminho.pt

## Resumo

*Ninguém questiona o facto de que o conhecimento matemático dos professores desempenha um papel crucial no seu ensino. Em Portugal, o novo programa de matemática para o ensino básico introduz as transformações geométricas a partir do 1.º ano de escolaridade. Sendo este um tema novo no currículo elementar, parece importante compreender que conhecimento detêm os futuros professores sobre o assunto.*

*Neste artigo são apresentados alguns resultados de um estudo realizado com futuros professores do ensino elementar que tem por objectivo avaliar os seus conhecimentos sobre transformações geométricas.*

*Palavras-chave: conhecimento de professores; conhecimento do conteúdo; geometria; transformações geométricas.*

## Introdução

Os professores do ensino elementar<sup>19</sup> desempenham um papel crucial na introdução de ideias matemáticas e conceitos básicos, mas fundamentais e iniciar um processo de aprendizagem matemática, com cada estágio altamente dependente do anterior. Assumindo que a matemática elementar é matemática fundamental no sentido defendido por Ma (1999), isto é, constitui os alicerces da futura aprendizagem matemática e contém os rudimentos de muitos conceitos importantes em ramos mais avançados da disciplina, então o único caminho sensato a tomar parece ser garantir conhecimentos matemáticos sólidos e eficazes nos futuros professores.

Actualmente, em Portugal, novas directrizes curriculares (DGIDC, 2007) dão um lugar de destaque à geometria, apontando para a importância do desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial, como o principal objectivo para o ensino de geometria. De particular interesse é uma alteração, em relação ao programa anterior, que consiste na iniciação, logo no 1.º ano, ao estudo de diferentes transformações geométricas, em primeiro lugar de forma intuitiva e depois com formalização crescente.

---

<sup>19</sup> Neste artigo, entende-se por ensino elementar o correspondente aos dois primeiros ciclos do ensino básico, ou seja, do 1.º ao 6.º ano de escolaridade.

No 1.º ciclo são apenas abordadas as isometrias, que são utilizadas no estudo de frisos e rosáceas. No 2.º ciclo é continuada a exploração deste tipo de transformações, dando-se especial ênfase à reflexão e à rotação.

#### Sobre o conhecimento do professor

Nas últimas décadas tem-se assistido a um crescente interesse dos investigadores pelo conhecimento do professor. Um dos trabalhos mais influentes sobre este assunto foi desenvolvido por Shulman. Referindo-se, em particular, ao conhecimento do conteúdo para os professores, Shulman (1986) considera três categorias: (a) conhecimento da matéria; (b) conhecimento pedagógico do conteúdo e (c) conhecimento curricular. Muito trabalho tem sido feito desde então, nomeadamente no campo da Educação Matemática, esclarecendo e redefinindo diferentes categorias do conhecimento dos professores. Num desses trabalhos, realizado com professores do 1.º ciclo, Ball (1990) considera que o entendimento necessário para ensinar matemática engloba não só o conhecimento substantivo da matemática como o conhecimento acerca da matemática. Quase todos os estudos concordam que o conhecimento dos professores é essencial para o ensino e que a sua falta parece comprometer o ensino e, portanto, a aprendizagem. Ma (1999), por exemplo, refere que: "o conhecimento limitado da matéria restringe a capacidade de um professor para promover uma aprendizagem conceptual entre os estudantes" (p. 38). Além disso, um conhecimento adequado para garantir a eficácia do ensino da matemática depende não só um sólido conhecimento matemático, mas também da natureza desse conhecimento (Askew, Brown, Rhodes, Johnson & Wiliam, 1997). É também reconhecido que os professores necessitam de um tipo de conhecimento diferente do exigido noutras profissões, com características exclusivas. Estudos recentes têm sido direccionados no sentido de uma teoria baseada na prática de conhecimento para o ensino (Davis & Simmt, 2006; Turner & Rowland, 2008). No entanto, apenas alguns têm tentado medir a real influência dos diferentes componentes do conhecimento do professor na instrução. O grupo de Michigan (Hill, Rowan & Ball, 2005; Hill et al. 2008) parece ter sido o primeiro a abordar esta questão com sucesso tendo recolhido evidências da influência do conhecimento do conteúdo por parte do professor no seu ensino. Baumert et al. (2010) foram mais longe e investigaram a influência do conhecimento do conteúdo e também do conhecimento pedagógico do conteúdo na qualidade da instrução e no progresso matemático dos alunos do ensino secundário. Um dos resultados deste estudo foi que o conhecimento pedagógico do

conteúdo é de importância fundamental para o progresso matemática dos alunos, sendo decisivo para a qualidade da instrução. No entanto, também o conhecimento do conteúdo deve merecer uma atenção especial na formação inicial e na prática lectiva uma vez que o seu deficit pode comprometer o desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo e, conseqüentemente, ter efeitos negativos sobre a instrução e o progresso dos alunos.

Em resumo, parece adequado afirmar que o conhecimento do conteúdo desempenha um papel crucial no ensino e ainda que não seja suficiente para garantir um ensino eficiente, é certamente necessário. Como afirma Ma (1999):

O conhecimento do professor pode não produzir automaticamente métodos de ensino promissores ou concepções pedagógicas novas. Mas sem o sólido apoio do conhecimento da material/conteúdo, métodos promissores ou novas concepções de ensino não podem ser realizado com sucesso (p. 38).

### Sobre a Geometria

É amplamente reconhecido que o estudo da geometria é muito importante, pois contribui para o desenvolvimento da visualização, o pensamento crítico, a intuição, a resolução de problemas, a prova, entre outros.

O estudo da geometria contribui para ajudar os alunos a desenvolver as capacidades de visualização, pensamento crítico, intuição, perspectiva, resolução de problemas, conjectura, raciocínio dedutivo, argumentação lógica e prova. As representações geométricas podem ser usados para ajudar os alunos a dar sentido a outras áreas da matemática: frações e multiplicação em aritmética, relações entre os gráficos de funções (de duas e três variáveis) e representações gráficas de dados em estatística. (Jones, 2002, p.125)

No entanto, a investigação em ensino e aprendizagem da Geometria é ainda muito escassa quando comparada com as investigações feitas noutros campos, nomeadamente Números e Operações ou Álgebra.

A literatura referente ao conhecimento geométrico dos (futuros) professores do ensino elementar revela que estes apresentam baixos níveis de conhecimento geométrico (e.g., Gomes, 2004; Jones, Mooney & Harries, 2002).

Por outro lado, Hershkowitz e Vinner (1984), num estudo em que era comparado o conhecimento de crianças com o de (futuros) professores do ensino elementar, descobriram que os professores não tinham conhecimento geométrico básico nem

capacidade de raciocínio analítico e além disso, os professores tendem a apresentar padrões similares de erros e concepções erradas aos dos alunos.

#### *As transformações geométricas*

Embora a investigação relativa ao ensino e à aprendizagem de transformações esteja pouco representados na literatura, podemos encontrar alguns estudos que abordaram a compreensão dos alunos sobre transformações geométricas, especialmente referindo-se a reflexão e rotação.

Em alguns estudos envolvendo crianças com idades inferiores a 10 anos (e.g. Moyer, 1978; Shah, 1969; Schultz, 1978) verificou-se que estas consideravam que as translações eram tão ou mais fáceis do que reflexões e estas eram mais fáceis do que rotações. Além disso, as translações horizontais eram muito mais fáceis do que as oblíquas.

Kucheman (1981) desenvolveu um estudo com alunos mais velhos (11 aos 16 anos), focando apenas as seguintes isometrias: reflexão e rotação. Em relação à reflexão o autor concluiu que a posição/inclinação do eixo influencia as respostas sendo que os alunos tiveram melhor desempenho quando o eixo era vertical ou horizontal; também a complexidade do objecto parece influenciar os resultados sendo que objectos mais simples, como um ponto ou uma linha, tiveram melhores resultados. Quanto à rotação, verificou-se que os alunos consideraram mais simples efectuar rotações em que o centro estivesse na figura.

Recentemente, a maioria dos estudos sobre transformações geométricas centram-se principalmente em experiências de ensino, muitas vezes envolvendo tecnologia (Hoyles & Healy, 1997; Knuchel, 2004; Marchini & Vighi, 2011)

Deve ser notado que existem poucos estudos sobre os conhecimentos dos professores acerca das transformações geométricas. Também a investigação tende a concentrar-se na reflexão e rotação não existindo quase nenhuma sobre translação (eventualmente porque é considerada "fácil").

#### *As transformações geométricas no actual programa*

O programa actualmente em vigor em Portugal (DGIDC, 2007) propõe uma alteração de relevo em relação ao programa anterior: o estudo, logo “desde o 1.º ciclo de diversas

transformações geométricas, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização.” (p. 7).

Nos dois primeiros ciclos do Ensino Básico, o estudo das transformações geométricas está limitado às isometrias. No 1.º ciclo espera-se que os alunos identifiquem figuras simétricas em relação a um eixo, que desenhem figuras simétricas relativamente a um eixo (horizontal ou vertical) e que construam frisos e identifiquem simetrias. Apesar de no programa apenas surgir explicitamente a reflexão como a isometria a ser abordada, a identificação de simetrias pressupõe que os alunos tenham alguma noção das restantes isometrias: translação, reflexão deslizante e rotação. No 2.º ciclo o estudo das isometrias é aprofundado sendo dada atenção especial à reflexão e à rotação. Os alunos deverão não só identificar e descrever as diferentes isometrias mas também construir o transformado de uma figura por uma qualquer isometria. Deverão além disso identificar e construir frisos e rosáceas.

### O estudo

Considerando que o tema “Transformações Geométricas” é uma novidade no currículo do ensino elementar, parece importante compreender que conhecimento têm sobre ele os futuros professores.

Assim, a questão de investigação é: Como se pode caracterizar o conhecimento dos futuros professores do ensino elementar sobre transformações geométricas?

O objectivo do estudo é identificar e descrever as dificuldades/erros que os futuros professores têm/fazem em relação às transformações geométricas, mais concretamente em relação às isometrias.

### *Metodologia*

O presente estudo insere-se no paradigma qualitativo (Erickson, 1986). O método de investigação utilizado foi o levantamento (survey) tendo os dados sido recolhidos através de um teste. Esse teste foi construído com foco nas três isometrias seguintes: rotação, reflexão e translação. As questões foram todas retiradas de manuais escolares do 4.º ano de escolaridade. A escolha das questões foi feita do seguinte modo: analisou-se o tipo de questões relativas às três isometrias em 6 manuais diferentes e seleccionaram-se as mais representativas de cada tipo.

No total o teste continha 5 questões: as 3 primeiras envolviam reflexão; a 4ª, translação e a última, rotação.

Nas questões sobre reflexão era pedido para: (1) marcar o(s) eixo(s) de simetria; (2) identificar se uma dada recta é eixo(s) de simetria e (3) fazer a reflexão segundo um ou mais eixos.

Em relação à translação, era pedido para fazer a translação de uma figura seguindo as setas. Note-se que, uma vez que a noção de vector não é abordada no 1.º ciclo, nos manuais consultados o vector é substituído por uma seta com um número indicando o número de quadrados para mover. Além disso, esta isometria não é muito frequente nos manuais, surgindo quase exclusivamente ligada aos frisos.

Quanto à rotação, apenas foram consideradas rotações de meia volta (tal como estipulado no programa oficial). Nos 5 itens da questão, era pedido para completar as imagens de modo a obter figuras com simetria de rotação de meia volta em torno de um ponto marcado (centro).

Os participantes no estudo eram alunas de uma turma do 3.º ano de Licenciatura em Educação Básica, todas do sexo feminino, de uma Universidade Portuguesa. Esta licenciatura está estruturada de tal forma que em todos os semestres há uma unidade curricular (UC) de matemática (5 ECTS cada), perfazendo um total de 6 UC de matemática ao longo dos três anos. Numa dessas UC, é trabalhado, de modo aprofundado, o tema das transformações geométricas. Para além das UC em Matemática há apenas uma UC de Didáctica da Matemática, no segundo semestre do último ano.

O teste foi aplicado no segundo semestre do ano lectivo de 2011/2012, no final de uma aula teórica. Responderam 64 alunas.

Após uma primeira apreciação das resoluções, procedeu-se à classificação das respostas em duas categorias: correcta e incorrecta. Nesta última categoria tentou-se identificar respostas típicas ou seja respostas que eram dadas por pelo menos 5 alunas.

## Apresentação e discussão de alguns resultados

### *Relativamente à Reflexão*

Sendo a reflexão a isometria provavelmente mais usada desde os primeiros anos e consequentemente mais conhecida, seria de esperar que as participantes não cometessem muitos erros. Contudo, não foi isso que aconteceu.

Na primeira questão para marcar o(s) eixo(s) de simetria, constatou-se que nas figuras que possuíam apenas um eixo de simetria (vertical ou horizontal) ou dois eixos de simetria (vertical e horizontal), quase todas as participantes o(s) desenharam correctamente. Mas, nas figuras com mais do que dois eixos de simetria surgiram algumas dificuldades sendo que a maior parte apenas desenhou dois eixos, um vertical e outro horizontal (como, por exemplo, na figura 1).

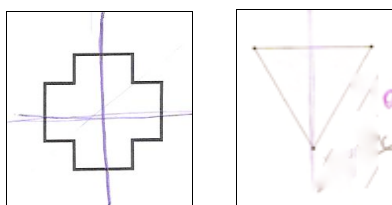


Figura 1 - Marcação incompleta dos eixos de simetria

Destaca-se aqui o caso do triângulo equilátero em que apenas 28 (44%) das participantes identificaram os três eixos de simetria (sendo que 35 participantes identificaram exclusivamente o eixo vertical), o que é surpreendente pois trata-se de uma figura que é muito familiar e normalmente é bastante explorada. Além disso, a identificação dos eixos de simetria dos triângulos surge explicitamente numa das Notas do Programa de Matemática do 2.º ciclo, pelo que se trata de algo que os professores deverão dominar.

Na segunda questão, identificar eixo(s) de simetria, os resultados foram bons com quase todas as participantes a identificarem correctamente as situações em que a(s) recta(s) traçadas é (são) eixo(s) de simetria.

Finalmente, na terceira questão, em que se pedia para fazer a reflexão segundo um ou mais eixos, surgiram muitas dificuldades especialmente quando o eixo de reflexão era oblíquo. Estas dificuldades são do mesmo tipo das identificadas em alunos, como atrás

referimos (e.g., Schultz, 1978; Kucheman, 1981). A figura 2 ilustra alguns dos erros efectuados pelas participantes nesta questão.

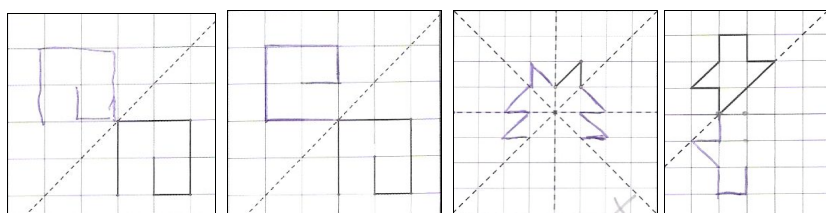


Figura 2 – Erros cometidos na reflexão

#### *Relativamente à Translação*

O caso da translação é interessante. Apesar de ser considerada uma isometria fácil (e.g. Moyer, 1978; Shah, 1969; Schultz, 1978) as participantes revelaram algumas dificuldades. Um dos erros mais frequentes foi o de considerar o comprimento do vector como o do espaço entre a figura e o seu transformado. (Figura 3)

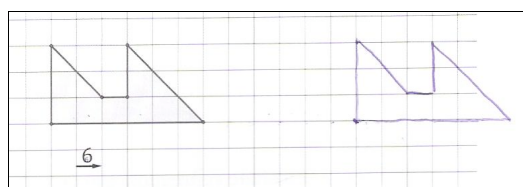


Figura 3 – Erro cometido na translação

Outro dos erros encontrados tem a ver com a deslocação da figura na direcção e sentido correctos mas sem atender ao comprimento do vector.

#### *Relativamente à Rotação*

Esta isometria parece ser aquela em que as participantes possuem mais dificuldades. Uma vez mais, estas dificuldades espelham as referidas na literatura relativas a crianças (e.g. Moyer, 1978; Shah, 1969; Schultz, 1978).

Na questão relativa às rotações era pedido, como já foi mencionado, para completar as imagens de modo a obter figuras com simetria de rotação de meia volta em torno de um ponto marcado (centro). O máximo de respostas correctas não ultrapassou os 39% em nenhum item. Este é um resultado perturbador. Observando as respostas dadas pelas participantes é possível constatar que parece haver uma confusão em relação ao que é



pedido. Com efeito, um número significativo de participantes efectua uma reflexão horizontal/vertical da figura, obtendo uma figura simétrica que não a pedida. (Figura 4).

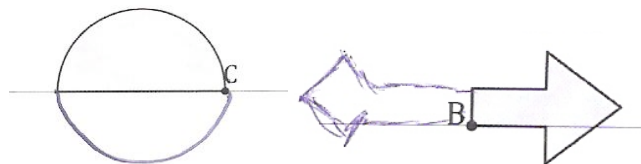


Figura 4 – Confusão entre rotação e reflexão

Este erro pode dever-se, por um lado, à linguagem usada, em particular ao termo “simetria” muitas vezes conotado com a reflexão; e por outro à representação dos itens, em que aparece uma linha horizontal em cada figura (à qual pertence o centro da rotação). Esta representação, para além de desnecessária, pode induzir os alunos em erro. Note-se que quer a representação, quer a linguagem são as usadas nos manuais escolares.

Um outro erro que se observou nesta questão, ainda que com menor frequência, foi a troca do ângulo da rotação: em vez de  $180^\circ$  (meia volta), algumas participantes consideraram  $90^\circ$  (quarto de volta) (Figura 5).

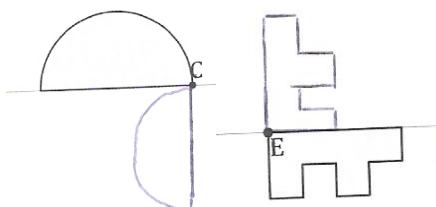


Figura 5 – Confusão entre rotação de  $180^\circ$  e de  $90^\circ$ .

### Considerações finais

Este estudo apresenta alguns resultados surpreendentes e ao mesmo tempo preocupantes. Em especial, mostra que estes futuros professores não parecem estar preparados para ensinar transformações geométricas. Embora eles já tivessem tido contacto com o tema, este estudo revelou muitas dificuldades em todas as isometrias estudadas. Aparentemente o modo como as transformações geométricas foram abordadas não permitiu ultrapassar/colmatar muitas das dificuldades/erros apresentadas

pelas alunas. Note-se, uma vez mais, que as questões colocadas foram retiradas de manuais escolares actuais, pelo que seria de esperar que estas alunas, futuras professoras, possuísem os conhecimentos necessários e suficientes para responder correctamente a todas elas. Tal, como vimos, não aconteceu. Perante este cenário, como poderemos esperar que estes futuros professores ensinem este tema aos alunos se eles próprios não possuem esse conhecimento?

Mais investigação é necessária por forma a identificar com clareza as dificuldades que os (futuros) professores possuem e perceber as suas causas. É sobretudo imperioso desenhar tarefas especificamente concebidas para “atacar” essas fragilidades e ajudar estes futuros profissionais a superá-las.

### Referências bibliográficas

- Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Wiliam, D. & Johnson, D. (1997). Effective Teachers of Numeracy: Report of a study carried out for the London King's College, University of London.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal* 90(4): 449-466.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal* 47 (1): 133-180.
- Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics* 61(3): 293-319.
- DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Disponível em: [http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/028\\_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf](http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf)
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp.119-161). New York: MacMillan.
- Gomes, A. (2004). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em geometria*. Tese de doutoramento (não publicada). Universidade do Minho.
- Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1984). Children's concepts in elementary geometry – a reflection of teacher's concepts? In *Proceedings of PME 8*, 63-69. Darlinghurst, Australia.
- Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26: 4 , 430 – 511.
- Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal* 42(2): 371-406.
- Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2: 27–59

- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In Linda Haggarty (Ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, 121-139. London: RoutledgeFalmer.
- Jones, K., Mooney, C. & Harries, T. (2002). Trainee primary teachers' knowledge of geometry for teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 22(1&2): 95-100.
- Knuchel, C. (2004). Teaching Symmetry In the Elementary Curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 1:1, 3-8.
- Kuchemann, D. (1981). Reflections and rotations. In K. M. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics* 11-16, 137-157. London: John Murray.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Marchini, C. & Vighi, P. (2011). Innovative early teaching of isometries. In M. Pytlak, T. Rowland and E. Swovoda (Eds.). *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 547-557. Rzeszów, Poland.
- Moyer, J. (1978). The Relationship between the Mathematical Structure of Euclidean Transformations and the Spontaneously Developed Cognitive Structures of Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9: 2, 83-92.
- Shah, S. A. (1969). Selected geometric concepts taught to children ages seven to eleven. *Arithmetic Teacher*, 16, 119-128.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15 (2): 4-14.
- Turner, F. & Rowland, T. (2008). *The knowledge quartet: a means of developing and deepening mathematical knowledge in teaching?* Disponível em <http://www.maths-ed.org.uk/mkit/seminar5.html>.